Formulaire de mécanique

Changement de référentiel :

✺ $\left(\dfrac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\dfrac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \wedge \vec{A}$

✺ $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$ et $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$

$\vec{v}_e = \left(\dfrac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{O'M}$

$\vec{a}_e = \left(\dfrac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}} + \dfrac{d\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$

$\vec{a}_c = 2 \cdot \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \wedge \vec{v}_r$

$\vec{f}_{ie} = -m \cdot \vec{a}_e$, $\vec{f}_{ic} = -m \cdot \vec{a}_c$

✺ Rotation à vitesse angulaire constante autour d'un axe fixe :

$\vec{a}_e = -\dot{\theta}^2 \cdot \overrightarrow{HM}$, donc : $\vec{f}_{ie} = m \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \overrightarrow{HM}$

✺ $\vec{p}^* = \vec{0}$ et $\vec{\sigma}^*_A = \vec{\sigma}^* = \vec{\sigma}_p = \vec{\sigma}_G$

Trièdre de Frénet : $\vec{v} = \dot{s} \cdot \vec{T}$ et $\vec{a} = \dfrac{dv}{dt} \cdot \vec{T} + \dfrac{v^2}{\rho} \cdot \vec{N}$

Mécanique du point : autres thèmes non développés

- travail et énergie potentielle
- mouvements à force centrale
- les oscillateurs
- problème à deux corps
- les chocs

Equilibrage d'un solide en rotation autour d'un axe fixe :

✾ Un tel solide est équilibré ⇔ les actions mécaniques qu'il exerce sur le bâti sont constantes au cours du temps ⇔ G est sur l'axe de rotation (équilibre statique) **et** l'axe de rotation est un axe principal d'inertie (équilibre dynamique)

✾ Méthode d'équilibrage : on rajoute des masses ponctuelles :

- on peut équilibrer avec 1 masse uniquement si E=0 (dans $\mathcal{I}_{(H,\mathcal{S})}$)
- on peut toujours équilibrer avec 2 masses

Théorie des mécanismes :

❁ $m_c = I_c - r_c$, $h_s = I_s - r_s$, $m = I_c - E_c = E_s - r_s = m_c - h_s$ et $h_s = E_c - r_c$

❁ $m_c = 0$: mécanisme bloqué. ❁ $h_s = 0$: mécanisme isostatique

❁ h_s est le nombre de ddl à rajouter au mécanisme pour le rendre isostatique ou le nombre de conditions géométriques précises que l'on doit assurer pour que le mécanisme satisfasse au modèle.

Torseurs :

Torseur des efforts : $\{\mathcal{T}_{ext\to\mathcal{E}}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_{ext\to\mathcal{E}}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{A,ext\to\mathcal{E}}} \end{Bmatrix}_A$

Torseur cinématique : $\{\mathcal{V}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}} \\ \overrightarrow{V_{A\in\mathcal{S}/\mathcal{R}}} \end{Bmatrix}_A$

Torseur cinétique :

$$\{\mathcal{C}_{\mathcal{E}/\mathcal{R}}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{p_{\mathcal{E}/\mathcal{R}}} = \iiint_{M\in\mathcal{E}} \overrightarrow{v_{M\in\mathcal{E}/\mathcal{R}}} \cdot dm = m \cdot \overrightarrow{v_{G\in\mathcal{E}/\mathcal{R}}} \\ \overrightarrow{\sigma_{A\in\mathcal{E}/\mathcal{R}}} = \iiint_{M\in\mathcal{E}} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{v_{M\in\mathcal{E}/\mathcal{R}}} \cdot dm = \sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \cdot \vec{v}_i \end{Bmatrix}_A$$

Torseur dynamique :

$$\{\mathcal{D}_{\mathcal{E}/\mathcal{R}}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{d\,\mathcal{E}/\mathcal{R}}} = \iiint_{M\in\mathcal{E}} \overrightarrow{a_{M\in\mathcal{E}/\mathcal{R}}} \cdot dm = m \cdot \overrightarrow{a_{G\in\mathcal{E}/\mathcal{R}}} \\ \overrightarrow{\delta_{A\in\mathcal{E}/\mathcal{R}}} = \iiint_{M\in\mathcal{E}} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{a_{M\in\mathcal{E}/\mathcal{R}}} \cdot dm = \sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \cdot \vec{a}_i \end{Bmatrix}_A$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{R_d} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} \\ \overrightarrow{\delta_{A\in\mathcal{E}/\mathcal{R}}} = \left(\dfrac{d\overrightarrow{\sigma_{A\in\mathcal{E}/\mathcal{R}}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + m \cdot \overrightarrow{v_{A\in E/R}} \wedge \overrightarrow{v_{G\in E/R}} \end{cases}$$

Moment d'inertie : $J_\Delta = \iiint_{M\in\mathcal{S}} d_{\Delta,M}{}^2 \cdot dm$

Solide homogène de masse m	Axe	Moment d'inertie
Barre de longueur l	⊥ à la barre en son milieu	$J_\Delta = \frac{1}{12}\cdot m \cdot l^2$
Cylindre plein de rayon R	Axe du cylindre	$J_\Delta = \frac{1}{2}\cdot m \cdot R^2$
Sphère pleine de rayon R	Diamètre	$J_\Delta = \frac{2}{5}\cdot m \cdot R^2$

Opérateur d'inertie : $\mathcal{J}_{(A,\mathcal{S})} = \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}} \mapsto \iiint_{M\in\mathcal{S}} \overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{AM}\right)\cdot dm$

$$mat\left(\mathcal{J}_{(A,\mathcal{S})}\right) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix} \text{ où } \begin{array}{l} A = \iiint_{M\in\mathcal{S}} \left(y^2+z^2\right)\cdot dm \\ D = \iiint_{M\in\mathcal{S}} y\cdot z\cdot dm \end{array}$$

Condition	Propriété
(O, x, y) plan de symétrie	D=E=0
(O, z) axe de révolution	Diagonale (D=E=F=0) et A=B
O point de symétrie	$mat\left(\mathcal{J}_{(A,\mathcal{S})}\right) = A \cdot I_3$

Théorèmes de Kœnig et de Huyghens : $Y_{O,\mathcal{S}} = Y_{O,G_{pts}} + Y^*_{G,\mathcal{S}}$

$\overrightarrow{\sigma_{O\in\mathcal{E}/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{OG} \wedge m \cdot \overrightarrow{v_{G\in\mathcal{E}/\mathcal{R}}} + \overrightarrow{\sigma^*_{G\in\mathcal{E}/\mathcal{R}^*}}$ et $\overrightarrow{\delta_{O\in\mathcal{E}/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{OG} \wedge m \cdot \overrightarrow{a_{G\in\mathcal{E}/\mathcal{R}}} + \overrightarrow{\delta^*_{G\in\mathcal{E}/\mathcal{R}^*}}$

$$E_c = \frac{1}{2}\cdot m \cdot v_{G\in\mathcal{E}/\mathcal{R}}{}^2 + E_c^*$$

$\mathcal{J}_{(A,\mathcal{S})}(\vec{u}) = m \cdot \overrightarrow{AG} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}\right) + \mathcal{J}_{(G,\mathcal{S})}(\vec{u})$ et $J_\Delta = m \cdot d_{\Delta,\Delta_G}{}^2 + J_{\Delta_G}$

Moment cinétique :

$\overrightarrow{\sigma_{A\in\mathcal{S}/\mathcal{R}}} = \mathcal{J}_{(A,\mathcal{S})}\left(\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}}\right) + m \cdot \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{v_{A\in\mathcal{S}/\mathcal{R}}}$

$\overrightarrow{\sigma_{A\in\Delta_{fixe/\mathcal{R}}}} = J_\Delta \cdot \overrightarrow{\Omega_{rot/\Delta}} + \overrightarrow{\sigma_\perp}$ où $\overrightarrow{\sigma_\perp} = \vec{0}$ si :

- l'axe de rotation Δ est axe de symétrie du système $\mathcal{S}$
- ou si $\mathcal{S}$ est plan et Δ est perpendiculaire à ce plan

PFD : dans un référentiel galiléen, $\left\{\mathcal{T}_{ext\to\mathcal{E}}\right\} = \left\{\mathcal{D}_{\mathcal{E}/\mathcal{R}}\right\}$

On peut appliquer le PFD (et les autres théorèmes)dans un référentiel non galiléen à condition d'y rajouter les forces d'inerties.

Energie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}\cdot \iiint_{M\in\mathcal{S}} v_{M\in\mathcal{S}/\mathcal{R}}{}^2 \cdot dm = \sum_i \frac{1}{2}\cdot m \cdot v_i{}^2$

pour n'importe quel point A :

$$E_c = \frac{1}{2}\cdot \overrightarrow{\sigma_{A\in\mathcal{S}/\mathcal{R}}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}} + \frac{1}{2}\cdot m \cdot v_{A\in\mathcal{S}/\mathcal{R}}{}^2 + \left(m \cdot \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{v_{A\in\mathcal{S}/\mathcal{R}}}, \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}}\right)$$

en G ou en un point A fixe : $E_c = \frac{1}{2}\cdot \overrightarrow{\sigma_{A_{fixe\_ou\_G}\in\mathcal{S}/\mathcal{R}}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}}$

$$E_c = \frac{1}{2}\cdot \overrightarrow{\sigma_{A_{fixe}\in\Delta_{fixe/\mathcal{R}}}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}} = \frac{1}{2}\cdot J_\Delta \cdot \Omega_{\mathcal{S}/\mathcal{R}}{}^2$$

Théorème de l'énergie cinétique : $\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int}$

$\mathcal{P}_{int} = 0$ s'il s'agit d'un unique solide indéformable

$\mathcal{P}_{int}$ ne dépend pas du référentiel considéré

$\mathcal{P}_{f_{ie}}{}^* = 0$

$dE_m = \delta W_{Forces\_non\_conservatives}$

Le frottement : Actions de $\mathcal{S}2$ sur $\mathcal{S}1$

Vitesse de glissement : $\overrightarrow{v_{gliss}} = \overrightarrow{v_{I\in\mathcal{S}1/\mathcal{S}2}} = \overrightarrow{v_{I\in\mathcal{S}1/\mathcal{R}}} - \overrightarrow{v_{I\in\mathcal{S}2/\mathcal{R}}}$

$\mathcal{P}_{frottement} = \vec{T} \cdot \overrightarrow{v_{gliss}} \leq 0$

Si $\overrightarrow{v_{gliss}} = \vec{0}$	Si $\overrightarrow{v_{gliss}} \neq \vec{0}$
$\left\Vert\vec{T}\right\Vert \leq f \cdot \left\Vert\vec{N}\right\Vert$	$\left\Vert\vec{T}\right\Vert = f \cdot \left\Vert\vec{N}\right\Vert$ $\vec{T} \wedge \overrightarrow{v_{gliss}} = \vec{0}$ et $\vec{T} \cdot \overrightarrow{v_{gliss}} < 0$